

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей



А.В. Глушко
19.05.2022

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.07 Стохастические дифференциальные уравнения

1. Код и наименование направления подготовки: 01.04.01 Математика
2. Профиль подготовки: Математические модели гидродинамики
3. Квалификация выпускника: Магистр
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета
6. Составители программы: к.ф.-м.н., доц. Михайлова И.В.
7. Рекомендована: НМС математического факультета 24.03.2022 Протокол № 0500-03
8. Учебный год: 2022/ 2023 Семестр(ы): 1

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели учебной дисциплины:

Овладение элементарными знаниями в области стохастического анализа, в частности, стохастического анализа на гладких многообразиях

Задачи учебной дисциплины:

Формирование у студентов:

- умения пользоваться формулой Ито;
- умения решать линейные стохастические дифференциальные уравнения;
- умения находить числовые характеристики решений стохастических дифференциальных уравнений;
- способности применения основных методов для исследования стратегии инвестора на рынке ценных бумаг

Основной задачей курса является изучение численных закономерностей в опытах, результаты которых не могут быть предсказаны однозначно до проведения испытаний.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Стохастические дифференциальные уравнения» относится к Блоку 1 Обязательной части.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, теория вероятностей, теория случайных процессов.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств, элементами теории вероятностей и теории случайных процессов.

Знание стохастических методов является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, стохастические дифференциальные уравнения являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

Дисциплина является предшествующей для курса Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1.1	Обладает обширным диапазоном знаний, полученным в области математических и(или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; основные понятия дисциплины стохастические дифференциальные уравнения Уметь: строить стохастические модели обширного класса реальных физических явлений, не укладывающихся в рамки детерминированных конструкций Владеть: владеть основами создания стохастических моделей
		ОПК-1.2	Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала,	Знать: зарубежную и отечественную литературу в области стохастических дифференциальных уравнений; основные способы постановки задач не

			интерпретировать различные математические объекты	укладывающихся в рамки детерминированных конструкций Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты; применять полученную теоретическую базу для решения конкретных задач стохастических дифференциальных уравнений Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами; методами исследования стохастических моделей
		ОПК-1.3.	Применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач	Знать: основные понятия курса, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений Уметь: грамотно работать с научной литературой с использованием новых информационных технологий Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области стохастических дифференциальных уравнений

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации Зачёт — 1 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			1 семестр
Контактная работа		32	32
в том числе:	лекции	16	16
	практические	16	16
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-
	контрольные работы	-	-
Самостоятельная работа		76	76
Промежуточная аттестация - зачет			
Итого:		108	108

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Элементы стохастического анализа	Непрерывность случайного процесса Дифференцируемость случайного процесса СК-интегрируемые случайные процессы Стохастический интеграл ИТО	-

		Формула ИТО	
1.2	Стохастические дифференциальные уравнения	Стохастические дифференциальные уравнения: определение, примеры, существование и единственность решения. Линейные стохастические дифференциальные уравнения. Вычисление моментов решения стохастического дифференциального уравнения. Асимптотически устойчивые системы стохастических дифференциальных уравнений. Характеристическая функция решения стохастического дифференциального уравнения.	-
1.3	Приложения к задачам финансовой математики	Финансовый рынок Портфель ценных бумаг Арбитражный и безарбитражный рынки Платежные обязательства Полные рынки Европейские опционы Страхование достижимого иска	-
2. Практические занятия			
2.1	Элементы стохастического анализа	Непрерывность случайного процесса Дифференцируемость случайного процесса СК-интегрируемые случайные процессы Стохастический интеграл ИТО Формула ИТО	-
2.2	Стохастические дифференциальные уравнения	Стохастические дифференциальные уравнения: определение, примеры, существование и единственность решения. Линейные стохастические дифференциальные уравнения. Вычисление моментов решения стохастического дифференциального уравнения. Асимптотически устойчивые системы стохастических дифференциальных уравнений. Характеристическая функция решения стохастического дифференциального уравнения.	-
2.3	Приложения к задачам финансовой математики	Финансовый рынок Портфель ценных бумаг Арбитражный и безарбитражный рынки Платежные обязательства Полные рынки Европейские опционы Страхование достижимого иска	-

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Элементы стохастического анализа	4	4	0	20	28
02	Стохастические дифференциальные уравнения	7	7	0	32	46
03	Приложения к задачам финансовой математики	5	5	0	24	34
	Итого:	16	16	0	76	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Стохастические дифференциальные уравнения» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий:

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Белопольская, Я. И. Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики : учебное пособие для вузов / Я. И. Белопольская. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 308 с. — ISBN 978-5-8114-6859-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152655 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Бородин, А. Н. Случайные процессы : учебное пособие / А. Н. Бородин. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 640 с. — ISBN 978-5-8114-1526-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168542 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3	Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики : монография : в 2 томах / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Том 1 : Факты, модели — 2016. — 440 с. — ISBN 978-5-4439-2391-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/80132 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4	Булинский, А. В. Теория случайных процессов : учебное пособие / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 400 с. — ISBN 978-5-9221-0335-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:

	https://e.lanbook.com/book/59319 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
--	--

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Источник
5	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
6	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
7	Михайлова И.В. <i>Стохастические дифференциальные уравнения</i> / И.В. Михайлова. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2009. – 17 с. http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-5vKeRU2xcU.pdf

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой (ауд. 312), расположенный на 3 этаже учебного корпуса № 1, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Элементы стохастического анализа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Устный опрос, контрольная работа
2	Стохастические дифференциальные уравнения	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Устный опрос, контрольная работа
3	Приложения к задачам финансовой математики	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	Устный опрос, контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - зачет				Перечень вопросов к зачету

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Устный опрос:

1. Непрерывность случайного процесса
2. Дифференцируемость случайного процесса
3. СК-интегрируемые случайные процессы
4. Стохастический интеграл ИТО
5. Формула ИТО
6. Стохастические дифференциальные уравнения: определение, примеры, существование и единственность решения.
7. Линейные стохастические дифференциальные уравнения.
8. Вычисление моментов решения стохастического дифференциального уравнения.
9. Асимптотически устойчивые системы стохастических дифференциальных уравнений.
10. Характеристическая функция решения стохастического дифференциального уравнения.
11. Финансовый рынок
12. Портфель ценных бумаг
13. Арбитражный и безарбитражный рынки
14. Платежные обязательства
15. Полные рынки
16. Европейские опционы
17. Страхование достижимого иска

Перечень практических заданий

1. $\{\xi(t)=\xi+t\}_{t \geq 0}$ — случайный процесс, где $\xi \sim N(0,1)$. Найти $M(\dot{\xi}(t))$.
2. Пусть скалярный случайный процесс $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет уравнению $d\xi(t) = a\xi(t)dt + udt + b d\varpi(t)$, $\xi(0) = v$. Является ли уравнение асимптотически устойчивым?
3. Определите, допускает ли следующий нормализованный рынок $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ арбитраж. Если нет, то является ли он полным: $n = 2, m = 3$ и $dS_1(t) = dt + d\varpi_1(t) + d\varpi_2(t) - d\varpi_3(t)$, $dS_2(t) = -3dt - 3d\varpi_1(t) - 3d\varpi_2(t) + 3d\varpi_3(t)$.

Пример задач контрольной работы:

1. $\{\xi(t)=\xi+t\}_{t \geq 0}$ — случайный процесс, где $\xi \sim N(0,1)$. Найти $M(\int_1^3 \xi(t)dt)$.
2. Пусть скалярный случайный процесс $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет уравнению $d\xi(t) = a\xi(t)dt + b\varpi(t)$, $\xi(0) = v$, является ли уравнение асимптотически устойчивым?
3. Определите, допускает ли следующий нормализованный рынок $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ арбитраж. Если нет, то является ли он полным: $n=m=2$ и $dS_1(t) = 3dt + d\varpi_1(t) + d\varpi_2(t)$, $dS_2(t) = -dt + d\varpi_1(t) - d\varpi_2(t)$.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Описание технологии проведения

Контрольная работа проводится письменно.

Требование к выполнению заданий

Контрольная работа

За контрольную работу ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;
- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;
- обучающийся выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «незачтено».

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Стохастические дифференциальные уравнения» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачёте оценивается уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции, определяются оценками «зачтено» и «незачтено»

Описание технологии проведения

На зачете студенту необходимо ответить на теоретический вопрос и решить задачу. Вопросы и задачи, охватывают весь материал, изучаемый за семестр.

Перечень вопросов к зачёту:

18. Непрерывность случайного процесса
19. Дифференцируемость случайного процесса
20. СК-интегрируемые случайные процессы
21. Стохастический интеграл ИТО
22. Формула ИТО
23. Стохастические дифференциальные уравнения: определение, примеры, существование и единственность решения.
24. Линейные стохастические дифференциальные уравнения.
25. Вычисление моментов решения стохастического дифференциального уравнения.
26. Асимптотически устойчивые системы стохастических дифференциальных уравнений.

27. Характеристическая функция решения стохастического дифференциального уравнения.
28. Финансовый рынок
29. Портфель ценных бумаг
30. Арбитражный и безарбитражный рынки
31. Платежные обязательства
32. Полные рынки
33. Европейские опционы
34. Страхование достижимого иска

Критерии выставления зачета:

Оценки	Критерии
Зачтено	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся показывает высокий интеллектуальный и общекультурный уровень, глубокое и всестороннее знание предмета, на теоретический вопрос дан правильный исчерпывающий ответ; обучающийся логично и аргументировано излагает материал и правильно решает предложенные практические задания; дополнительные вопросы не вызывают затруднений; - обучающийся дает ответ на теоретический вопрос и правильно решает одну из предложенных практических задач; дополнительные вопросы не вызывают затруднений; - обучающийся не дает ответа на теоретический вопрос, но правильно решает предложенные практические задания, дополнительные вопросы могут вызывать затруднения
Незачтено	Во всех других случаях обучающемуся ставится незачтено